Stochastik

# Die Dreimal-Mindestens-Aufgabe

**Spezialaufgabe mit vielen Beispielen**

**Gezeigt werden beide Formen der Aufgabe:**

**„mindestens einmal“**

**„mindestens mehrmals“.**

**Datei Nr. 31110**

**Stand 25. Juli 2016**

**FRIEDRICH W. BUCKEL**

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

## Hinweise

Diese überall beliebte Aufgabe „mindestens ein …“ wird hier gründlich beleuchtet und aufbereitet, so dass sie spielend nachempfunden werden kann.

Die wesentlich schwierigere Aufgabe „mindestens mehrere …“ wird im zweiten Teil besprochen, stellt jedoch höhere Anforderungen, denn die Kenntnis der binomialen Verteilungsfunktion wird vorausgesetzt.

## Inhalt


| | | |
|---|---|---|
| 1 | Grundlagen – (dies muss man hierzu wissen.) | 3 |
| 2 | Die einfache Dreimal-Mindestens-Aufgabe | 4 |
| 3 | Noch zwei Beispiele | 6 |
| 4 | Aufgaben | 7 |
| | Lösungen dazu | 8 |
| 5 | Die erweiterte Dreimal-Mindestens-Aufgabe | 12 |

# 1. Grundlagen

Bei dieser Aufgabenform wird ein Teilexperiment mehrfach nacheinander ausgeführt. Man zählt dann, wie oft ein bestimmtes Ergebnis eintritt bzw. nicht eintritt. Dafür verwendet man eine sogenannte Zufallsvariable X. Für alle unsere Beispiele soll die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ergebnisses sich während des Gesamtexperiments nicht ändern.

Wer schon etwas mehr gelernt hat, der weiß, dass man so ein Experiment eine **Bernoullikette** nennt.

| 1. Stufe : E tritt auf mit p. | → | 2. Stufe : E tritt auf mit p. | → - - - - - → | n. Stufe : E tritt auf mit p. |
|---|---|---|---|---|

**Beispiele:**

a) Man würfelt n = 50-mal. Das Teilergebnis lautet: Man würfelt eine Eins.
Dieses tritt mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ ein.

b) Man zieht 12-mal eine Karte aus einem Stapel.
Gewünschtes Ergebnis: Man zieht eine rote Karte. Dies tritt ein mit $p = \frac{1}{3}$

c) Man wirft 30-mal eine Münze. Es geht um das Wurfergebnis „Zahl", mit $p = 0{,}5$

d) Es werden 200 Schrauben auf Güte getestet. Sie haben mit 2% Wahrscheinlichkeit einen Defekt.

**Spezielle Fragestellung:** **Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man das Teilergebnis mindestens einmal.**

Bei 50 Würfen heißt das, einmal, zweimal oder mehr. Dies zu berechnen ist auf direktem Wege zu umständlich. Daher wird „Mindestens einmal" immer über das Gegenereignis berechnet:

Es sei X die Anzahl der Erfolge (Teilergebnis erreicht).
Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Erfolg: $P(X \geq 1)$

Gegenereignis: Kein Erfolg: $P(X=0) = (1-p)^n$

Denn beim Gegenereignis tritt das Zielergebnis nie auf:

$$\underbrace{\xrightarrow{1-p} \overline{E} \xrightarrow{1-p} \overline{E} \xrightarrow{1-p} \overline{E} \ldots\ldots \xrightarrow{1-p} \overline{E}}_{n-\text{mal}}$$

Folgerung: Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Erfolg: $\boxed{P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)}$

**Zu den Beispielen:**

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelt man mindestens eine Eins?
$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man mindestens eine rote Karte?
$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man mindestens einmal „Zahl"?
$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}5^n$

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man mindestens eine defekte Schraube?
$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}98^n$

## 2. Die „einfache“ Dreimal-Mindestens-Aufgabe

Ich formuliere sie zuerst für unsere 4 Beispiele von der Seite zuvor:

a) Wie oft muss man **mindestens** würfeln,
um mit **mindestens** 90% Wahrscheinlichkeit
**mindestens** eine Eins zu bekommen?

b) Wie oft muss man **mindestens** eine Karte aus dem Stapel ziehen (und wieder zurückstecken),
um mit **mindestens** 80% Wahrscheinlichkeit
**mindestens** eine rote Karte zu bekommen?

c) Wie oft muss man die Münze **mindestens** werfen,
um mit **mindestens** 99% Wahrscheinlichkeit
**mindestens** einmal „Zahl“ zu bekommen?

d) Wie viele Schrauben muss man mindestens testen,
um mit **mindestens** 95% Wahrscheinlichkeit
**mindestens** eine defekte Schraube zu finden?

**Lösungsweg:**

**.....**